Замечательные последовательности

В третьем туре предыдущего конкурса «Математика 6—8» с легкой руки Анатолия Павловича Савина была предложена следующая задача:

В последовательности a_1, a_2, a_3, … *число* a_1 *равняется 1799, а число* a_2 *равняется 1828. Каждое из следующих чисел находится по закону* $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{a_{n-1}}$. *Чему равняется* a_{1997}?

Несколько неожиданным представляется тот факт, что, начиная с шестого номера, значения членов последовательности $\{a_n\}$ повторяются: $a_6 = a_1$, $a_7 = a_2$, $a_8 = a_3$ и т.д. Обнаружив и обосновав эту закономерность, уже без труда можно рассчитать величину $a_{1997} = a_{5 \cdot 399+2} = a_2 = 1828$.

Некоторые школьники сочли, что с этой задачей играючи справится компьютер. Для этого достаточно составить простенькую программу, что-то вроде:

$a_{\text{пред пред}} := 1799$;
$a_{\text{пред}} := 1828$;
$i := 2$;
<u>начало цикла</u> <u>пока</u> $i < 1997$
$i := i + 1$;
$a := \left(a_{\text{пред}} + 1\right) / a_{\text{пред пред}}$;
$a_{\text{пред пред}} := a_{\text{пред}}$;
$a_{\text{пред}} := a$
<u>конец цикла</u>;
вывод a.

Рассуждавшие так попали в ловушку! Дело в том, что с абсолютной точностью компьютер умеет обрабатывать лишь *целые* числа, а вот *дробные* числа, хотя и с достаточно высокой точностью, вычисляются им *приближенно.* Так, например, для числа a_{1997} железный вычислитель может выдать результат $1{,}8280000000000000 \cdot 10^3$, гарантируя лишь 16 точных значащих цифр после запятой. Что располагается начиная с 17-го места после запятой и далее – для компьютера «покрыто мглой». В данном случае он может лишь *подсказать* наблюдательному исследователю возможную закономерность, наличие же ее нужно обосновывать иным способом, например с помощью алгебраических выкладок. Кстати, для обоснования периодичности последовательности $\{a_n\}$ недостаточно убедиться лишь в единичном совпадении $a_6 = a_1$, как это сделали некоторые из участников конкурса. Каждый член последовательности $\{a_n\}$ зависит *от двух* предыдущих членов, поэтому необходимо обязательно убедиться также в том, что $a_7 = a_2$.

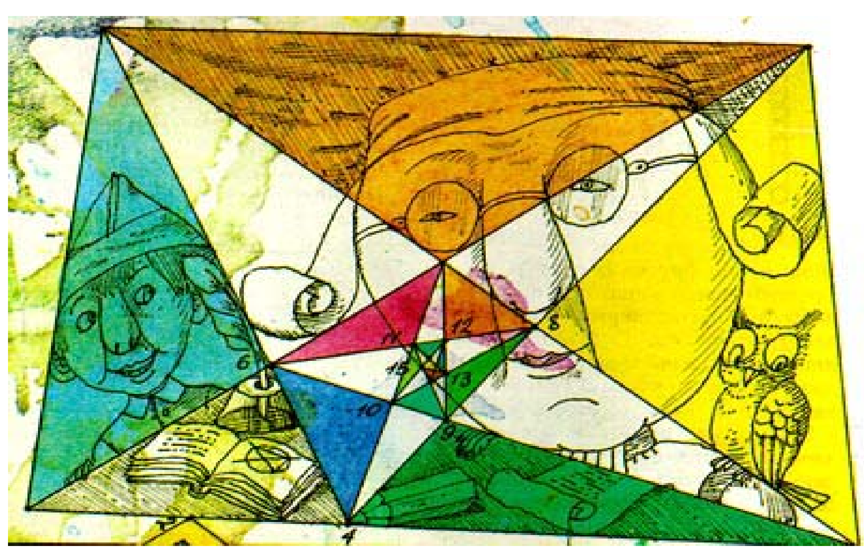
Замечательные числовые последовательности — частые гости у тех, кто подружился с числами. Возьмем первые 9 членов арифметической прогрессии 143, 286, 429, …, 1287 и умножим их на число 777. В итоге получим последовательность 111111, 222222, 333333, …, 999999. Этот пример умножения «с некоим удивлением» приводит уже автор первого российского учебника по математике Леонтий Магницкий (1669—1739).

Следующая замечательная последовательность описана в книге Жака Арсака «Программирование игр и головоломок» (М.: Наука, 1990). В качестве начального члена последовательности выберем произвольное натуральное число. Все остальные члены последовательности получаются по правилу: за любым элементом последовательности следует число, равное сумме кубов всех цифр данного элемента. Например,

$b_1 = 27$;
$b_2 = 2^3 + 7^3 = 8 + 343 = 351$;
$b_3 = 3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = 153$;
$b_4 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$;
и т.д.

Любопытно, что какое бы начальное число b_1, делящееся на 3, мы ни взяли, рано или поздно мы неизбежно придем к числу 153. Этот замечательный факт помог доказать компьютер.

Прежде всего заметим, что все члены последовательности $\{b_n\}$ принадлежат единому семейству чисел, кратных трем (пожалуйста, убедитесь в этом самостоятельно). Далее замечаем, что для элемента последовательности b_n, больше некоторого порога, следующий элемент b_{n+1} всегда меньше своего предшественника. Действительно, для k-значного числа b_n сумма кубов его цифр ограничена сверху числом $k \cdot 9^3 = 729k$. При $k \ge 5$ имеем $b_n \ge 10^4 > 3645 =$



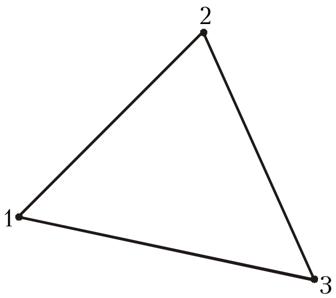


Рис. 1

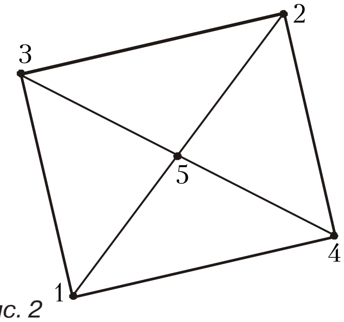


Рис. 2

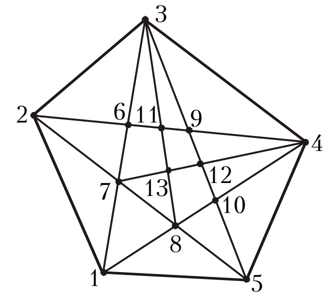


Рис. 3

$= 729 \cdot 5 \geq b_{n+1}$. Итак, порог − это число 10^4. Достаточно проверить справедливость связанного с числом 153 замечательного факта для всех кратных трем чисел от 1 до 10^4, и мы тем самым докажем его справедливость для всех остальных чисел данного семейства. Вот здесь-то как раз и может пригодиться компьютер!

Рассмотрим другую замечательную последовательность. В качестве начального элемента выберем четырехзначное натуральное число, не все цифры которого равны между собой. Переход от данного элемента последовательности к следующему производится по такому правилу. Расположим десятичные цифры в записи данного числа в порядке убывания слева направо — получим первое число. Расположим их в обратном порядке и вычтем это второе число из первого. Таким образом получаем следующий элемент последовательности. Как ведут себя члены такой последовательности?

Следующая числовая последовательность:

11, 101, 1001, 10001, ..., 100...001, ...

обладает загадками иного рода. Сразу можно заметить, что члены этой последовательности, содержащие четное число нулей, делятся на 11 (быстро убедиться в этом помогает известный признак делимости на 11: число делится на 11, если в десятичной записи этого числа сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах). Элементы последовательности с нечетным количеством нулей также обнаруживают некоторые закономерности. Для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

числа $10^{1+2n} + 1$ делятся на 11;
числа $10^{2+4n} + 1$ делятся на 101;
числа $10^{4+8n} + 1$ делятся на 73;
числа $10^{8+16n} + 1$ делятся на 17;
. . .

Открытым остается вопрос: всякое ли число вида $10^k + 1$ составное (здесь k − натуральное)?

Замечательные последовательности можно искать не только в мире чисел, но и в мире фигур.

Пусть на плоскости задано некоторое множество точек, пронумерованных от 1 до n. Конфигурацию этих точек будем наращивать по следующему правилу. Начнем соединять отрезками точку 1 по порядку с другими точками, имеющими больший номер: с точкой 2, с точкой 3 и т.д. Затем ту же операцию произведем, отправляясь от точки 2, от точки 3 и т.д. (точка с меньшим номером всегда соединяется с точкой с большим номером). Каждый раз, когда на пересечении отрезков образуется одна новая точка, она получает следующий по порядку незанятый номер: $n + 1$, $n + 2$ и т.д. Если проводимый отрезок пересекает сразу несколько других отрезков − нумерация вновь образованных точек производится в порядке возрастания от точки с меньшим номером в сторону точки с большим номером.

Легко заметить, что 3 точки на плоскости не порождают новых точек (рис.1), 4 точки могут породить одну-единственную пятую точку (рис.2). Чудеса начинаются, когда в исходной конфигурации участвуют 5 точек. Вообще говоря, 5 точек − это «критическая масса», с которой начинается «цепная реакция»: необузданный рост новых точек (рисунок 3 — конфигурация после соединения точек 1, 2, 3, 4 с другими точками). Однако существуют такие исходные конфигурации, когда рост новых точек производится «равномерно» (на рисунке 4 показана конфигурация после соединения точек 1, 2, …, 13 с другими точками).

Существует ли исходная конфигурация из 6 и большего количества точек, обладающая этим же свойством?

А.Жуков

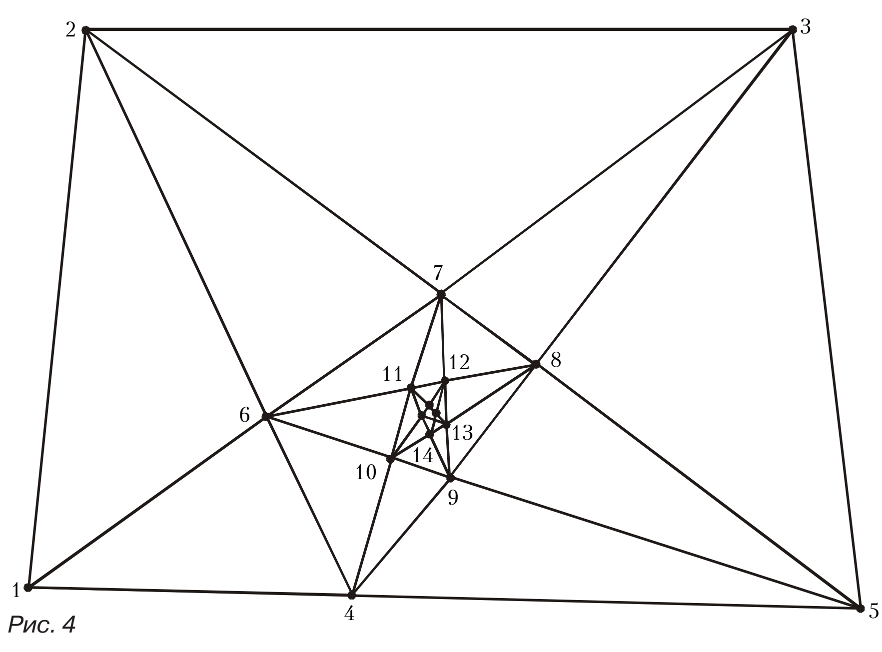


Рис. 4